

به نام خدا

۱۱- ۹, ۶, ۴, ۲, ۱ (۴)

تمرین

- مفهوم ترمینال نوعی بودن دو بردار صفاتی

مجموعه A_n از دنباله‌های ترمینال نوعی (x^n, y^n) با توزیع تمام $P(x, y)$

↓

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

مجموعه‌ای از دنباله‌های به طول n است که
دایره‌ای آنتروپی تجربی نزدیک به آنتروپی واقعی هستند (فاصله با آنتروپی واقعی برابر است)
به صورت ریاضی ،

$$\{ (x^n, y^n) \mid \left| -\frac{1}{n} \lg P(x^n) - H(X) \right| < \epsilon, \quad ,$$

$$\left| -\frac{1}{n} \lg P(y^n) - H(Y) \right| < \epsilon, \quad ,$$

$$\left| -\frac{1}{n} \lg P(x^n, y^n) - H(X, Y) \right| < \epsilon \quad \}$$

که در آن $P(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^n P(x_i, y_i)$

نصف AEP برای نوعی (joint AEP)

فرض کنیم که (x^n, y^n) دنباله‌ای به طول n باشد به صورت نوآ iid با احتمال

$$P(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^n P(x_i, y_i)$$

تکرار شده باشد. در این صورت

$$1) P_r \{ (x^n, y^n) \in A_\epsilon^{(n)} \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

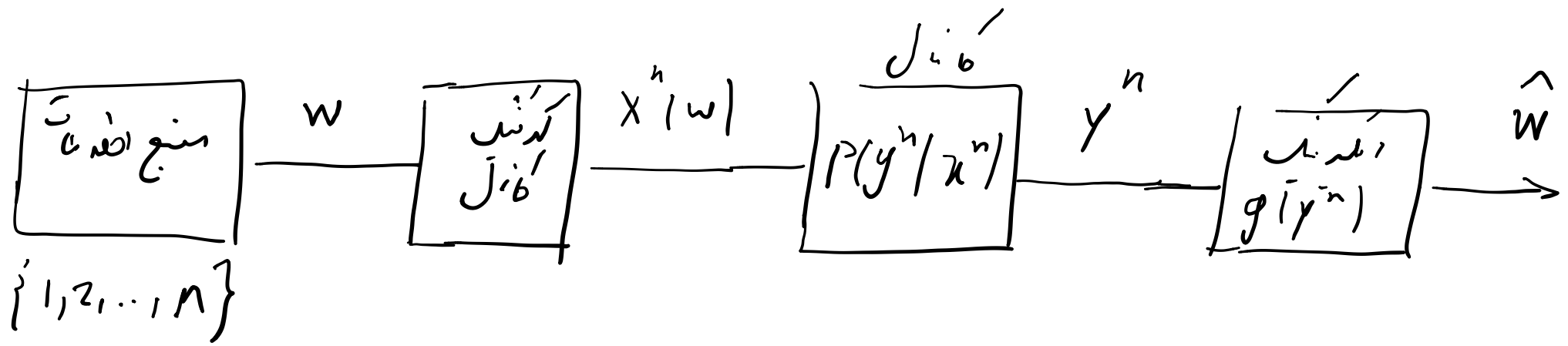
$$2) |A_\epsilon^{(n)}| \leq 2^{n(I(X, Y) + \epsilon)}$$

$$3) (\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) \sim P(x^n)P(y^n) \Rightarrow P_r \{ (\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) \in A_\epsilon^{(n)} \} \leq 2^{-n[I(X, Y) - 3\epsilon]}$$

یعنی $(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$ به صورت مستقل، با تدریج احتمال کمی
مستقل به x^n, y^n انتخاب شوند.

$$4) \quad \Rightarrow P_r \{ (\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) \in A_\epsilon^{(n)} \} \geq 2^{-n[I(X, Y) + 3\epsilon]} \quad (1-\epsilon)$$

برای n به اندازه کافی بزرگ



با توجه به اینکه $H(x, y) < H(x) + H(y)$ اگر x^n ، y^n هر کدام جداگانه فرعی باشند
 ترکیب (x^n, y^n) نزدیکتر است. احتمال اینکه در دنباله به صورت تصادفی
 انتخاب شوند نزدیکتر است. پس همه ی نوق ترکیب برابر $2^{-nI(x; y)}$ است.
 به عبارت دیگر تعداد $2^{nI(x; y)}$ دنباله y^n می توانند وجود داشته باشند که با x^n نزدیکتر
 باشند. $2^{nI(x; y)}$ تعداد x^n های قابل تمایز درگیر است (به عبارت دیگر برای هر x^n

درمانی دیگرند که به ازای x^h حاصل شده است، $2^{nI(x,y)}$ کلمه که وجود دارد که
 با γ تراش نوعی است و می تواند تولد خط در دیکشنری که احتمال این خط برابر $2^{-nI(x,y)}$

است که حتی قسمه فون محدودکننده است.
 در واقع روش دیکشنری به این صورت است که گزیده با دریافت γ^h در بین کلمات به سی لرد
 و کلمه که γ^h تراش نوعی است پیدا می کند و اندیس آن را به عنوان اندیس ارسال
 آشفته سازی می کند. با توجه به ترسیمات داده شده، گزیده عملی است (خطا بسیار

اما این خطا با افزایش n به سمت صفر میل فزاینده دارد.

$$\frac{\text{تعداد تراش نوعی}}{\text{تعداد همه اکانز نوعی}} = \frac{2^{-nI}}{2^{nH(x)} \times 2^{nH(y)}} = 2^{-nI(x,y)}$$

فصله در سبب انتقال

شناختن برای اثبات اینکه انتقال اصطلاحات به خود قابل اطمینان درسی قابل برای تمام زرفهای عمر
از طریق استخوان نه بر است از خضایات زیر یکدی می گردد.

- ۱- احوال صفای رگه سبب اصرار در نظر نمی گردد بلکه به میزان دشواری هم در نظر می گیرد
- ۲- برای انتقال سبب درسی قابل ، n بار از قابل استفاده می کنند به این ترتیب به این n به اندازه کافی برکت می سرانند از قانون اعداد پرتل یکدیگر
- ۳- می بینیم که احوال صفای رگه سبب انتخاب صفای رگه ها گام به گام می کنند و نشان می دهد که دست کم
یک که به خطی به میزان دشواری کم برای انتقال میبرد دارد. (برای رسیدن به ظرفیت قابل)

خصه کشیدنی قابل (برای حالت‌های گسسته بدون طاقه DMC)

تمام نرخ‌های گسسته از ظرفیت قابل دسترسی هستند. یعنی اگر $R \leq C$ باشد آنگاه باید که $(2^{nR}, n)$

وجود دارد که برای آن $\lambda^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ، برعکس اگر که $(2^{nR}, n)$ با $\lambda^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ وجود

داشته باشد حتماً باید داشته باشیم $R \leq C$

اثبات: قابل دسترسی بودن.

باید که متناظر با $(2^{nR}, n)$ با توزیع P^n ترکیبی کنیم. در واقع $M = 2^{nR}$ کد

$$P(x^n) = \prod_{i=1}^n P(x_i)$$

مسئله با توزیع ترکیبی. مرحله که دارد یعنی از سرهای مارتینگال که قرار می‌دهیم

$$C = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & x_3(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & \dots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(M) & x_2(M) & \dots & \dots & x_n(M) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 = \omega \\ 2 = \omega \\ \vdots \\ \underbrace{M = \omega}_{2^{nR}} \end{matrix}$$

1 2 n

چون المانهای ماتریس C به صورت تَرَتَباً iid ترنس شده اند، احتمال ترنس شدن C برابر است با

$$\Rightarrow P(C) = \prod_{\omega=1}^{2^{nR}} \prod_{i=1}^n P(x_i(\omega)) \quad (*)$$

روند زیر را در نظر می گیریم:

۱- که مقدار فرضی C بر اساس رابطه (۱) تولید می شود.

۲- که C در اختیار فرستنده و گیرنده قرار می گیرد. علاوه بر این فرض می کنیم که فرستنده و گیرنده از وضعیت کانال اطلاع دارند یعنی $P(y|x)$ در اختیار دارند.

۳- اندیس W به صورت یکیزافت از بین مجموعه اندیسین $\{1, 2, \dots, M\} = W$ انتخاب می شود.

$$P(W=w) = \frac{1}{M} = 2^{-nR} \quad \text{یعنی}$$

• این فرض میسر می شود، البته مسئله از آنجا که به رابطه ای برای صفای رده.

۴- برای ایستادن $W = w$. سطر w ام از ماتریس C روی k ام ایستادن می شود

۵- y^n بردار n تایی که دارای توزیع زیر است:

$$P(y^n | x^n(w)) = \prod_{i=1}^n P(y_i | x_i(w))$$

۶- y^n بردار n تایی که w ام ایستادن می شود است. این کار برای n تایی نوعی بودن y^n باطلات که انجام می دهد.

* ML که ML است اما ML برای آن است که ML است

Maximum likelihood
↓
تقریباً ML برای آن به صورت ML است

گزینه ۱. $\hat{w}$ را به عنوان اندیس ایصال بشود، آشکار سازی می کند اگر

الف) $(y^n, x^n(\hat{w}))$ توانای نوعی باشند و

ب) هیچ اندیس دیگری w' وجود نداشته باشد به ازای آن $(x^n(w'), y^n)$ توانای نوعی باشند. اگر $\hat{w}$ وجود نداشته باشد یا بیش از یک اندیس وجود داشته باشد w' به ازای آن $(x^n(w'), y^n)$ توانای نوعی باشند. اگر $\hat{w}$ وجود نداشته باشد یا بیش از یک اندیس وجود داشته باشد w' به ازای آن $(x^n(w'), y^n)$ توانای نوعی باشند. اگر $\hat{w}$ وجود نداشته باشد یا بیش از یک اندیس وجود داشته باشد w' به ازای آن $(x^n(w'), y^n)$ توانای نوعی باشند.

۷- خطای رگرسیو زائد است که $w \neq \hat{w}$. این بیش آمده را ϵ نامش می رهم

$$\epsilon = \{w \neq \hat{w}\}$$

هدف این است که اثبات کنیم که $\lambda^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. بنابراین در ادامه با آبی احتمال خطای این روش ارسال در ریاضت را بررسی می‌کنیم.

آسان‌ترین احتمال خطا

برای اینکه احتمال خطا را به راحتی بدست آوریم، می‌توانیم احتمال خطای هر یک از مجموعه‌های $\mathcal{E}$ را محاسبه کنیم.

$$P(c) = \prod_{w=1}^{2^{nR}} \prod_{i=1}^n P(x_i | w)$$

$$P_r \{ \mathcal{E} \} = \sum_c P(c) P_e^{(n)}(c) = \sum_c P(c) \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \lambda_w(c)$$

$$P_e^{(n)}(c) = \sum_{w=1}^{2^{nR}} P(w) \lambda_w(c) \stackrel{\text{میانگین}}{=} \sum \frac{1}{2^{nR}} \lambda_w(c) = P_e(c)$$

$$\Rightarrow P_r \{ \mathcal{E} \} = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \sum_c P(c) \lambda_w(c) = f$$

چون برای تمام کدهای تصادفی میانگین نمری شده به w وابستگی ندارد

بنابراین در عبارت بالا، می‌توان فرض کرد که اندیس $w=1$ ارسال شده است

$$P_r \{ \mathcal{E} \} = P_r \{ \mathcal{E} | w=1 \} = P_r \{ \mathcal{E} | w=2 \} = \dots = P_r \{ \mathcal{E} | w=2^{nR} \}$$

رابطه $\{ \mathcal{E} \}$ مستقل از این است که کدام اندیس ارسال شده باشد. ما برای اداره آن، شرط $w=1$ در شرط می‌گیریم.

در ادامه باید $P_r \{ \hat{w} \neq w | w=1 \}$ را پیدا کنیم. برای این منظور، پیش از آنکه $\mathcal{E}_i$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathcal{E}_i \triangleq \{ (x^n(i), y^n) \in A_{\epsilon}^{(n)} \}$$

چون فرض کردیم که $w=1$ ایستاده است، γ^n خودی قابل بهزایی $X^n(1)$ است.
 و می توان نوشت

$$P_r \{ \varepsilon \mid w=1 \} = P_r \{ \varepsilon_1^c \cup \varepsilon_2 \cup \varepsilon_3 \cup \dots \cup \varepsilon_{2^{nR}} \mid w=1 \}$$

↓
 γ^n با $X^n(1)$ تراندا نباشد

↓
 γ^n با $X^n(2)$ تراندا نری باشد

$$\leq P_r \{ \varepsilon_1^c \mid w=1 \} + P_r \{ \varepsilon_2 \mid w=1 \} + \dots + P_r \{ \varepsilon_{2^{nR}} \mid w=1 \}$$

↑
 قانون جمع اممال

$$\Rightarrow P_r \{ \varepsilon \mid w=1 \} \leq P_r \{ \varepsilon_1^c \mid w=1 \} + \sum_{i=2}^{2^{nR}} P_r \{ \varepsilon_i \mid w=1 \}$$

$$P_r \{ \epsilon_i^c \mid w=1 \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

یا کم از حد $A \in P$ تمام توان نوشت،
(نیز قضیه)

$$\Rightarrow P_r \{ \epsilon_i^c \mid w=1 \} \leq \epsilon$$

همچنین توان نوشت (نیز قضیه)

چون $X^h(i) \perp X^h(1)$ برای $i \neq 1$ ، بنابراین $Y^n \perp X^n(i)$ برای $i \neq 1$ و توان نوشت

$$P_r \{ \epsilon_i \mid w=1 \} \leq 2^{-n[I(X;Y) - 3\epsilon]}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_r \{ \epsilon \} &= P_r \{ \epsilon \mid w=1 \} \leq P_r \{ \epsilon_i^c \mid w=1 \} + \sum_{i=2}^{2^{nR}} P_r \{ \epsilon_i \mid w=1 \} \\ &\leq \epsilon + \sum_{i=2}^{2^{nR}} 2^{-n[I(X;Y) - 3\epsilon]} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_r \{ \varepsilon \} \leq \varepsilon + \underbrace{(2^{nR} - 1) 2^{-n[I(x;y) - 3\varepsilon]}}$$

$$\leq \varepsilon + \underbrace{2^{nR} 2^{-n[I(x;y) - 3\varepsilon]}}$$

$$= \varepsilon + 2^{3n\varepsilon} 2^{-n[I(x;y) - R]}$$

$$\Rightarrow P_r \{ \varepsilon \} \leq \varepsilon + 2^{3n\varepsilon} 2^{-n[I(x;y) - R]} \leq 2\varepsilon$$

↑
 $R < I(x;y)$ ، n به اندازه کافی بزرگ

اگر $R < I(x;y)$ باشد، به ازای n به اندازه کافی بزرگ، احتمال خطا به میزان دلخواه می تواند کم باشد.

به عبارت دیگر اگر $(\gamma, x) \in R$ باشد، با انتخاب مناسب $n \in \mathbb{N}$ می توان به احتمال ضعیف (میانگین روی تمام کدها) به میزان دشواری کم رسید.

اثبات را به صورت زیر کامل می کنیم.

- اگر $P(n)$ برابر $P^*(n)$ در نظر بگیریم که در آن $P^*(n)$ توزیع است که $I(x, y)$

اما نزع می کند، آن گاه شرط $R \subset I(x, y)$ به شرط $R \subset C$ تبدیل می شود.

- در مرحله بعد باید به این نتیجه برسیم که می توان $\lambda^{(n)}$ وجود دارد.

با توجه به اینکه میانگین اعمال خطا روی تمام کدهای متناهی $\{C\} \subseteq P$ است، می توان نتیجه گرفت که صدای C^* وجود دارد که برای آن داریم $P_e^{(n)}(C^*) \leq 2\epsilon$

$$C^* | 2^{nR}, n)$$

که C^* یک سری از مقادیر nR که در آن صفت بدترین است که C^* از آن صفت شده است

$$C^{**} \left(\frac{2^{nR}}{2}, n \right) = C^{**} | 2^{nR-1}, n)$$

$$\checkmark \quad P_e^{(n)}(C^{**}) = \frac{1}{2^{nR-1}} \sum_{i=1}^{2^{nR-1}} \lambda_i(C^{**}) \leq 2\epsilon$$

از طرف دیگر

$$P_e^{(n)}(C^*) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{i=1}^{2^{nR}} \lambda_i(C^*) \leq 2\epsilon$$

$\forall i; \lambda_i(C^{**}) \leq 4\epsilon$ (برای $\lambda^{(n)} \leq 4\epsilon$ همواره باید داشته باشیم) $\Rightarrow \lambda^n(C^{**}) \leq 4\epsilon$

که C^{∞} دارای نرخ $R' = R - \frac{1}{n}$ است که برای n به اندازه کافی بزرگ تقریباً برابر

R فاصله برد.
بنابراین نشان داده شد که دست کم یک که ضرب و جود دارد که با انتخاب مناسب n ، ϵ
رای آن داریم
$$\bigwedge^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

